Study Material

B Sc General

PHYSICS

Semester-IV

DSC-1D

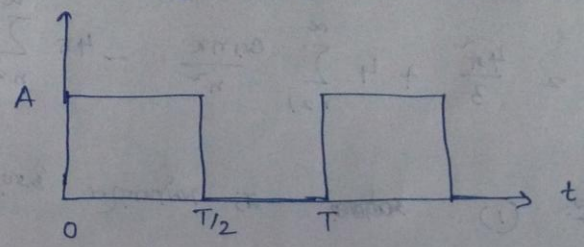
Duration- 1.30 hr

Date: 07/04/2020

Time- 7.30AM-9AM

Topic: Fourier's theorem –square wave analysis

Ex2 : নিম্নের তরঙ্গরূপের ফুরিয়ে বিশ্লেষণ নির্ণয় কর।



A ⇒ স্থির মান

⇒ নিম্নের তরঙ্গরূপের গাণিতিক রূপ হচ্ছে -

$f(t) = y(\omega t) = A$ = স্থির মান, যখন $0 \le t \le T/2$

$= 0$, যখন $T/2 \le t \le T$

ফুরিয়ে বিশ্লেষণ অনুযায়ী -

$$f(t) = y(\omega t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad \text{---(1)}$$

যেখানে $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(\omega t)\, dt$

$= \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} f(\omega t)\, dt + \int_{T/2}^{T} f(t)\, dt \right]$

$= \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} A\, dt + 0 \right]$

$= \frac{1}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot A = \frac{A}{2}$

$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t\, dt$

$= \frac{2}{T} \left[\int_0^{T/2} A \cos n\omega t\, dt + \int_{T/2}^{T} 0 \cdot \sin n\omega t\, dt \right]$

$= \frac{2A}{T} \left[\frac{\sin n\omega t}{n\omega} \Big|_0^{T/2} \right.$

$= \frac{2A}{n \cdot \omega T} \left[\sin n\omega \frac{T}{2} - \sin 0 \right]$

$= \frac{2A}{n \cdot 2\pi} \left[\sin n \cdot \pi - \sin 0 \right] = 0$ $\left[\because \omega = \frac{2\pi}{T} \right.$

$$b_n = \frac{2}{T}\left[\int_0^T y \sin n\omega t\, dt\right]$$

$$= \frac{2}{T}\left[\int_0^{T/2} A \sin n\omega t\, dt + \int_{T/2}^{T} 0 \cdot \sin n\omega t\, dt\right]$$

$$= \frac{2A}{T}\left[\int_0^{T/2} \sin n\omega t\, dt\right]$$

$$= \frac{2A}{T}\left[-\frac{\cos n\omega t}{n\omega}\Big|_0^{T/2}\right] \qquad \left[\omega = \frac{2\pi}{T},\ \omega T = 2\pi\right]$$

$$= -\frac{2A}{n\omega T}\left[\cos n\omega\frac{T}{2} - \cos 0\right]$$

$$= \frac{A}{n\pi}\left[1 - \cos n\pi\right]$$

n বিজোড় হলে অর্থাৎ $n = 1, 3, 5, 7, \ldots,$ $\cos n\pi = -1$

$$\therefore b_n = \frac{2A}{n\pi}$$

$$\therefore b_1 = \frac{2A}{\pi},\ b_3 = \frac{2A}{3\pi},\ b_5 = \frac{2A}{5\pi}, \ldots$$

n জোড় হলে অর্থাৎ $n = 2, 4, 6, \ldots,$ $\cos n\pi = +1$

$$\therefore b_n = 0 \qquad (\because a_0 = \frac{A}{2})$$

$$\therefore y = \frac{A}{2} + \sum_n b_n \sin n\omega t \qquad (\because a_n = 0)$$

যেখানে n বিজোড়

$$= \frac{A}{2} + (b_1 \sin\omega t + b_3 \sin 3\omega t + \ldots)$$

$$= \frac{A}{2} + \left(\frac{2A}{\pi}\sin\omega t + \frac{2A}{3\pi}\sin 3\omega t + \ldots\right)$$

$$= \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\left[\frac{\sin\omega t}{1} + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \ldots\right]$$

$$= \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin(2m+1)\omega t}{(2m+1)}$$

$$\therefore \; y = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin (2m+1)\omega t}{(2m+1)}$$

সুতরাং, ফুরিয়ার বিশ্লেষণ থেকে দেখা যায় বর্গাকার-তরঙ্গে কেবল শুধুমাত্র sin-পদ বিশিষ্ট মূল কম্পাঙ্কের অযুগ্ম হারমোনিক গুলি উপস্থিত থাকে।