Study Material

B Sc General

PHYSICS

Semester-IV

DSC-1D

Duration- 1 hr

Date: 05/04/2020

Time- 8AM-9AM

Fourier's theorem

বিবৃতি: কোনো একমান বিশিষ্ট, পর্যাবৃত্ত অপেক্ষককে গুণিতক কম্পাঙ্কের অসীম সংখ্যক sine এবং cosine পদের যোগফল হিসাবে প্রকাশ করা যায়।

সাধারণ রূপ,
$$y = f(\omega t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\right) \quad \text{—(1)}$$

যেখানে $0 \leq t \leq T$, $T = 2\pi/\omega$.

অনুরূপ -
$$y = f(x) = f(\theta) = f(t)$$
$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$$

যেখানে $0 \leq x \leq 2\pi$ or, $-\pi \leq x \leq +\pi$

$x \rightarrow \theta \rightarrow t$.

a_0, a_n এবং b_n হল ধ্রুবক.

ধ্রুবক গুলি নির্ণয়ের নিয়ম:

(1) a_0 নির্ণয়ের জন্য (1) নং সমীকরণের উভয়পক্ষে dt দ্বারা গুণ করে, 0 থেকে T সীমার মধ্যে সমাকলন করলে পাওয়া যায়

$$\int_0^T y\,dt = a_0\int_0^T dt + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_0^T \cos n\omega t\,dt + b_n\int_0^T \sin n\omega t\,dt\right]$$

$$\int_0^T \cos n\omega t\,dt = 0 \text{ এবং } \int_0^T \sin n\omega t\,dt = 0$$

$$\int_0^T \cos n\omega t\,dt = \frac{1}{n\omega}\left[\sin n\omega t\right]_0^T = \frac{1}{n\omega}\left[\sin n\omega T - \sin 0\right] = \frac{1}{n\omega}\left[\sin n\cdot 2\pi - 0\right] = \frac{1}{n\omega}\left[0-0\right] = 0$$

$$\therefore \int_0^T y\,dt = a_0\int_0^T dt$$

$$a_0 \cdot T = \int_0^T y\,dt$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T y\,dt \quad \text{---} \ (3)$$

(2) a_n নিৰ্ণয় কৰাৰ বাবে (1) নং সমীকৰণৰ উভয় পক্ষক $\cos m\omega t\,dt$ ৰে পূৰণ কৰি $t=0$ ৰ পৰা $t=T$ সীমাৰ মাজত সমাকলন কৰি পোৱা যায়

$$\int_0^T y\cos m\omega t\,dt = a_0\int_0^T \cos m\omega t\,dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_0^T \cos n\omega t\cos m\omega t\,dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\int_0^T \sin n\omega t\cos m\omega t\,dt \quad \text{---} \ (4)$$

যেহেতু

$$\int_0^T \cos m\omega t\,dt = 0$$

$$\int_0^T \sin n\omega t\cos m\omega t\,dt = 0,$$

$$\int_0^T \cos n\omega t\cos m\omega t\,dt = \frac{T}{2}\delta_{mn}$$

$\therefore$ (4) নং সমীকৰণ হ'ব

$$\int_0^T y\cos m\omega t\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{T}{2}\delta_{mn}$$

$m=n$ হ'লে $\delta_{mn}=1$

$$\therefore \int_0^T y\cos n\omega t\,dt = a_n\cdot\frac{T}{2}$$

$$\therefore a_n = \frac{2}{T}\int_0^T y\cos n\omega t\,dt \quad \text{---} \ (5)$$

(3) অনুৰূপে, b_n নিৰ্ণয় কৰাৰ বাবে (1) নং সমীকৰণৰ উভয় পক্ষক $\sin m\omega t\,dt$ ৰে পূৰণ কৰি, 0 ৰ পৰা T সীমাৰ মাজত সমাকলন কৰি পোৱা যায়

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T y\sin n\omega t\,dt \quad \text{---} \ (6)$$

সুতরাং,

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T y\,dt \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T y\cos n\omega t\,dt \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T y\sin n\omega t\,dt \end{aligned}}$$

অনুরূপে (2) নং সমীকরণের ক্ষেত্রে সহগ গুলি হবে-

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y\,dx \quad \text{or} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} y\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y\cos nx\,dx \quad \text{or} \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} y\cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y\sin nx\,dx \quad \text{or} \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} y\sin nx\,dx$$